# מרחבי מכפלה פנימית

## מכפלה סקלרית בממשיים - Rn

היא מכפלה בין שני וקטורים או יותר בעלי אותו סדר גודל, התוצאה של המכפלה היא סקלר שהוא סכום מכפלות רכיבי הוקטורים המוכפלים בהתאמה. יהי v, u שני וקטורים עם n קואורדינטות v, uRn כך: u = [u1, u2, u3, …, un] , v = [v1 ,v2, v3, …, vn], אז המכפלה הסקלרית שלהם אותה נסמן , היא: . = u1∙v1 + u2∙v2 + u3∙v3 + ⋯ + un∙vn

מכפלה סקלרית אינה מכפלה רגילה כמו של מטריצות, זאת כי לפי כפל מטריצות לא ניתן להכפיל את u ו-v כי שניהם מאותו גודל ואינם ריבועיים. אמנם אם נשחלף אחת מהם זה יתאפשר (תכונה 6 בסעיף הבא).

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. .
5. אם ורק אם u = .
6. . היא המטריצה המשוחלפת של u.

## מכפלה סקלרית במרוכבים - Cn

יהי v, u שני וקטורים מרוכבים כך: u = [u1, u2, u3, …, un] , v = [v1 ,v2, v3, …, vn]. אזי המכפלה הסקלרית שלהם היא: . כאשר הוא הצמוד של v[[1]](#footnote-1).

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. , ויותר מזה . לכן נורמה של וקטור מרוכב היא מספר ממשי.
5. אם ורק אם u = .
6. . כאשר היא הוקטור המשוחלף והצמוד של v - .

## נורמה של וקטור

נורמה של וקטור, נסמן , הוא סקלר המתקבל מהחישוב: . נגדיר "וקטור יחידה" וקטור שהנורמה שלו שווה 1, כלומר .

"נרמול של וקטור u" זה להכפיל את u בסקלר מתאים כך שתוצאת המכפלה היא וקטור היחידה. סקלר זה הוא: .

### משמעות גיאומטרית

נורמה של וקטור הוא בעצם האורך שלו, לכן הנורמה של וקטור יכולה להיות 0 רק בוקטור ה-0. וקטור היחידה הוא באורך אחד והוא הרדיוס במעגל היחידה.

באמצעות הנורמה של שני וקטורים והמכפלה הסקלרית שלהם ניתן לחשב את הזווית שביניהם. נתונים הוקטורים u, v אזי מתקיים: . לפיכך נחשב את הזווית כך: .

נשים לב כי המסקנה העולה מהמשוואה הראשונה היא שמתקיים: . זאת מפני , לכן רק מקטין את הביטוי משמאל.

## אורתוגונליות

וקטורים u, v יקראו אורתוגונליים זה לזה אם מתקיים: , ונסמן uv. וקטור האפס אורתוגונלי לכל וקטור.

המשמעות הגאומטרית של וקטורים אורתוגונליים היא שהם ניצבים זה לזה.

יחס אורתוגונליות אינו תורשתי (טרנזיטיבי), כלומר אם uv וגם vw אז לא בהכרח uw.

## מכפלה פנימית בממשיים - Rn

היא פונקציה שקולטת שני וקטורים מאותו סדר גודל ופולטת מספר ממשי - . ניתן לראות כי המכפלה הסקלרית היא דוגמא למכפלה פנימית, והיא גם נקראת "המכפלה הפנימית הסטנדרטית". כשנרצה לבדוק האם פונקציה מהסוג שכתבנו לעיל היא מכפלה פנימית נבדוק אם מקיימת את התכונות הבאות:

### תכונות

1. .
2. .
3. .
4. .
5. אם ורק אם u = .

## מרחב מכפלה פנימית

מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי V המכיל קבוצת וקטורים מסוימים, עבורו מוגדרת פונקציה בין כל שני וקטורים במרחב שהיא מכפלה פנימית. נשים לב כי תכונות מכפלה פנימית מכילות גם את כל התנאים הנדרשים לכך ש- Vיהיה מרחב וקטורי.

במרחב מכפלה פנימית נגדיר נורמה של וקטור ואורתוגונליות של שני וקטורים בהתאם למכפלה הפנימית המוגדרת עבור המרחב.

**נורמה של וקטור** - . וקטור יחידה הוא וקטור שמקיים: .

**אורתוגונליות** - שני וקטורים u, v אורתוגונליים אם , ונסמן uv.

## אי שוויון קושי - שוורץ

בכל מרחב מכפלה פנימית מתקיים: .

הערה - יש לשים לב כי חישוב הנורמה של u, v מתאים למכפלה הפנימית כמו שלמדנו בסעיף קודם.

### שימוש במשפט קושי שוורץ להוכחת משפטים:

1. אם נרצה לבחור n מספרים כך שהסכום שלהם יהיה K אך סכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי, אז נשתמש במשפט הבא:

**משפט:** יהיו n *מספרים כך ש-. אזי מתקיים:* *. כלומר סכום הריבועים המינימלי הוא , וזה מתקבל כאשר מתקיים: , מפני ש-.*

**הוכחה:** נבחר שני וקטורים , . נחשב:

v

*.* . . לפי משפט קושי-שוורץ: , כלומר *. ואז* , נחלק ב-n ונקבל , כנדרש.

1. **משפט:** לכל מרחב מכפלה פנימית מתקיים: .

u

מכיוון שכבר למדנו שנורמה היא אורך של וקטור, המשמעות הגיאומטרית של משפט זה היא ששתי וקטורים תמיד יותר ארוכים או שווים לוקטור החיבור ביניהם. משפט זה נקרא "אי שוויון המשולש".

u+v

**הוכחה:** תהיה f המכפלה הפנימית *. מתקיים:*

*.*

*לפי משפט קושי-שוורץ: . אם נעשה שורש נקבל כי:* כנדרש.

1. "מספר צמוד" הוא מספר שבו מוחלף הסימן של החלק המדומה בלבד, ממינוס לפלוס ומפלוס למינוס. החלק הממשי נותר ללא שינוי. אם *אז* . *ואם*  *אז* . [↑](#footnote-ref-1)